Данная серия методичек по электроду посвящается лучшему семинаристу по электроду

Семинарист: А вы смотрели фильм «Аватар»? N оттуда знаете? Я так называю всех начальников, завкафедры… Потому что N по сюжету победил M, а на такое не каждый способен…

У нас движущиеся среды, а значит, пора вспомнить преобразования Лоренца. Был у нас двензор электромагнитного поля

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

К нему добавляется тензор намагниченности

$$M_{kn} = \begin{pmatrix} 0 & -P_x & -P_y & -P_z \\ P_x & 0 & M_z & -M_y \\ P_y & -M_z & 0 & M_x \\ p_z & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}$$

И ещё вот такой вот

$$Q^{ik} = F^{ik} + 4\pi M^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Само собой, для пар **P** и **M**, **D** и **H** действуют ровно те же преобразования Лоренца, что и для пары **E** и **B** в 5-м семестре:

$$\vec{E} = \vec{E}' + \gamma[\vec{\beta}\times\vec{B}'] \qquad \vec{B} = B' - \gamma[\vec{\beta}\times\vec{E}]$$

$$\vec{D} = \vec{D}' + \gamma[\vec{\beta}\times\vec{B}'] \qquad \vec{H} = H' - \gamma[\vec{\beta}\times\vec{D}']$$

$$\vec{P} = \vec{P}' + \gamma[\vec{\beta}\times\vec{M}'] \qquad \vec{M} = \vec{M}' - \gamma[\vec{\beta}\times\vec{P}']$$

Запоминать надо только первую строчку, остальные получаются заменой.

Возможный алгоритм решения всех задач на движущиеся среды один:

1) Ищем поле, как будто бы среда не двигалась (т.е. в его СК)
2) Подвергаем поле преобразованиям (переходим в ЛСК), используя формулы выше
3) Подставляя поле в ЛСК, находим что надо.

Можно искать не поле, а дипольные электрический (обозначается **p** или **d**) и магнитный **m** моменты. Они преобразуются по тем же формулам, что и поле, что и **P** с **M** (можно считать, что заглавные буквы «Р» и «М» усыхают до строчных):

$$\vec{p} = \vec{P} + \gamma[\vec{\beta}\times\vec{m}] \qquad \vec{m} = \vec{M} - \gamma[\vec{\beta}\times\vec{p}]$$

Именно они нам потребуются в 29.1.

ЗАДАЧА 29.1

29.1. Диэлектрический шар (радиус R, $\mu = 1$, $\epsilon \neq 1$) движется в однородном постоянном электрическом поле $\vec{E}_0$ со скоростью $\vec{v}$, $v \ll c$. Найти создаваемое им магнитное поле.

Отметим, что в вопросе от нас требуют ***магнитное*** поле, хотя у нас нет никаких магнитов, лишь диэлектрический шар. Да, но он движется – и этого достаточно.

Обозначим СК, связанную с шаром, штрихованной.

Мы считали дипольный момент такого шара в начале семестра:

$\vec{d}' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 \vec{E}_0'$, в первом приближении (v//c<<1) можно считать, что $\vec{E}_0' = \vec{E}_0$.

А вот магнитный момент в СК шара m', конечно, =0: в своей СК шар покоится.

Всё, мы написали всё, что могли в системе шара, пора камбекаться в ЛСК:

От нас спрашивают магнитное поле, поэтому в ЛСК нам **d** без надобности, а вот магнитный момент **m** нужен. Чему он равен? $m = m' - [\vec{\beta} \times \vec{d}']$, учитывая, что m'=0, получаем $m = [\vec{\beta} \times \vec{d}']$.

$\vec{d}'$ нам известен, поэтому $\vec{m} \simeq -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 [\frac{\vec{v}}{c}, \vec{E}_0]$.

А зная магнитный момент, легко находим магнитное поле по формуле

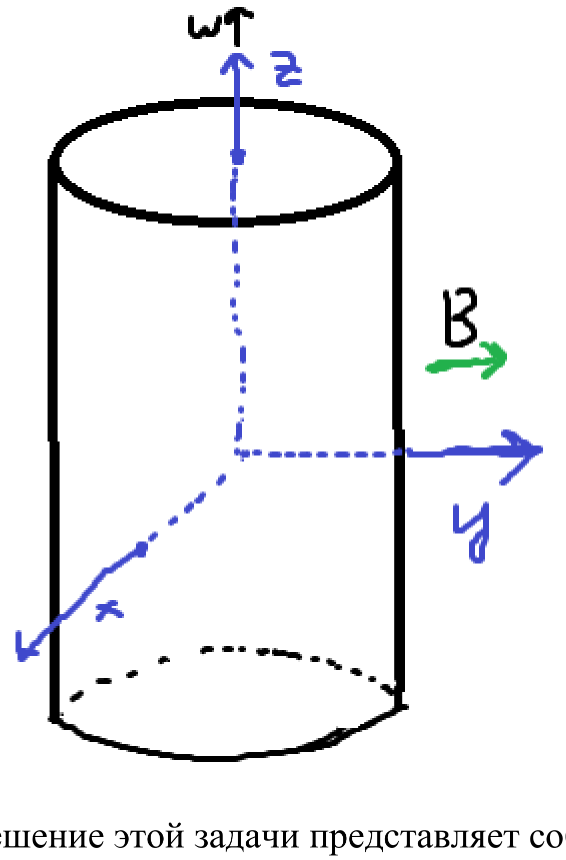
$$\vec{B} = \frac{3(\vec{R}\vec{m})\vec{R} - \vec{m}R^2}{R^5}$$

Тут тоже нюанс - $\vec{R}$ это не просто $\vec{r}$, это $\vec{r} - \vec{v}t$. Подставим в ту формулу **m** и получим ответ. $m = m' - [\vec{\beta} \times \vec{d}']$.

Но не для всех задач на движущиеся среды нужны преобразования Лоренца! В 29.2 и 29.3 мы обойдёмся без них.

ЗАДАЧА 29.2

29.2. Проводящий цилиндр радиуса R, высоты h вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω в однородном постоянном магнитном поле $\vec{B} \perp \vec{\omega}$. Оценить момент сил (при $h \gg R$, $\delta \gg R$), необходимых для поддержания равномерного вращения.



Решение этой задачи представляет собой «матрёшку» - результат одной формулы будет подставлять в другой.

Тормозящий момент сил будет равен $\vec{N}_{торм} = [\vec{m}\,\vec{B}]$. **B** мы знаем, **m** не знаем.
m найдём как интеграл по объёму цилиндра:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\iiint [\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})]\, d^3V$$

Это превосходно, только для этого интеграла нам нужна плотность тока $\vec{j}(\vec{r})$ в каждой точке цилиндра. Как её будем искать? По формуле

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \left\{ \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{c}[\vec{v}(\vec{r}) \times \vec{B}] \right\}$$

Ну, электрической напряжённости у нас нигде нет, так что это сразу усохнет

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{c}[\vec{v}(\vec{r}) \times \vec{B}]\}$$

А как искать **v(r)**? Ну тут уже достаточно вспомнить формулу из механики $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$.

Всё, мы дошли до самой маленькой матрёшки, а теперь давайте соберём большую ☺ Для наглядности выпишем формулы ещё раз друг над другом:

$$\vec{N}_{торм} = [\vec{m}\,\vec{B}] \quad (1)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\iiint [\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})]\, d^3V \quad (2)$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{c}[\vec{v}(\vec{r}) \times \vec{B}]\} \quad (3)$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] \quad (4)$$

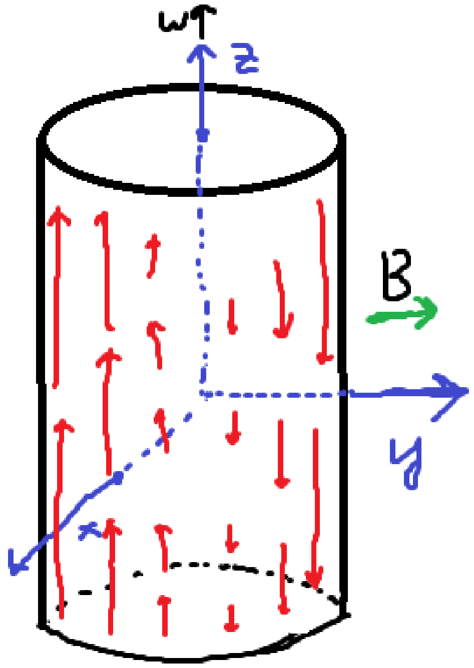
У нас четыре матрёшки ☺
Подставляем (4) в (3):

$$\vec{j} = -\frac{\sigma}{c}[\vec{B}[\vec{\omega}\,\vec{r}]] = -\frac{\sigma}{c}\left\{ \vec{\omega}(\vec{B}\vec{r}) - \vec{r}\,\cancelto{0}{(\vec{B}\vec{\omega})} \right\}$$

Мы раскрыли двойное векторное произведение по правилу «бац минус цаб», а затем воспользовались тем, что **B** ортогональна **ω**=> **Bω**=0. А как бы нам упростить (**Br**)? Это скалярное произведение можно подсчитать:

$B\mathbf{e}_y$*$(x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y+z\mathbf{e}_z)=By$. Получаем By. Итого, $\vec{j} = -\frac{\sigma}{c} B y\, \vec{\omega}$.

(Заметим, что т.к. **ω** направлена вверх, то ток в каждой точке нашего цилиндра течёт вертикально; при положительной ординате вниз, при



отрицательной вверх:).

Итак, в каждой точке цилиндра мы подсчитали ток, что даёт нам право перейти к следующей матрёшке – интегралу (2).

$\mathbf{m}=\frac{1}{2c}\iiint_{\text{цилиндру}}^{\text{по}}[\boldsymbol{r},\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})]dV=\frac{1}{2c}\iiint_{\text{цилиндру}}^{\text{по}}\left[\boldsymbol{r},-\frac{\sigma}{c}B\text{y}\boldsymbol{\omega}\right]dV=$
$\frac{-\sigma B}{2c^2}\iiint_{\text{цилиндру}}^{\text{по}}y[\boldsymbol{r},\boldsymbol{\omega}]dV$

Считаем векторное произведение через определитель:

$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix}$, получаем у$\mathbf{e}_x$-х$\mathbf{e}_y$.

$\mathbf{m}=\frac{-\sigma B}{2c^2}\iiint_{\text{цилиндру}}^{\text{по}}y[\boldsymbol{r},\boldsymbol{\omega}]dV=\frac{-\sigma B}{2c^2}\iiint_{\text{цилиндру}}^{\text{по}}y(y\boldsymbol{e_x}-x\boldsymbol{e_y})dV$

Так как у нас цилиндр, то интеграл будет удобнее считать в цилиндрической СК. Не забудем про якобиан перехода r:

$\mathbf{m}=\frac{-\sigma B}{2c^2}\int_0^R r\,dr\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\varphi * r^2\cos\varphi\,(\cos\varphi\ \boldsymbol{e_x}-\sin\varphi)\boldsymbol{e_y}=$
$=\frac{-\sigma B}{2c^2}*\frac{R^4}{4}*h*2\pi\,\boldsymbol{e_x}=\frac{-\sigma BR^4h\pi}{8c^2}\boldsymbol{e_x}$

Финальная матрёшка – считаем момент силы по (1):

$\mathbf{N}_{\text{торм}}=[\mathbf{m},\mathbf{B}]=[\frac{-\sigma BR^4h\pi}{8c^2}\boldsymbol{e_x},B\boldsymbol{e_y}]=\frac{-\sigma B^2R^4h\pi}{8c^2}\boldsymbol{e_z}$

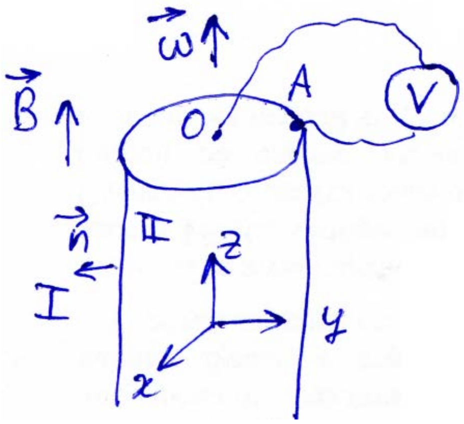
А мы должны прикладывать $\mathbf{N}_{\text{наших ручонок}}=\mathbf{N}_{\text{тормозящий от поля}}$, чтобы суммарный момент сил был 0, поэтому

Ответ: $\frac{\sigma B^2R^4h\pi}{8c^2}\boldsymbol{e_z}$

Величина его прямо пропорциональна ординате.

ЗАДАЧА 29.3

29.3. Нейтральный проводящий цилиндр радиуса R вращается с угловой скоростью ω в постоянном магнитном поле $\vec{B} \parallel \vec{\omega}$. Определить разность потенциалов между точкой на оси цилиндра и точкой на его боковой поверхности. Найти распределение зарядов в цилиндре.



Найдём в каждой точке напряжённость: **E(r)**. А это не очень сложно. Самый сложный шаг – вспомнить формулу

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]$$

Далее, как в 29.2, выразить линейную скорость через угловую и подсчитать двойное векторное произведение:

$$\vec{E} = \frac{1}{c}[\vec{B}[\vec{\omega}\vec{r}]] = \frac{1}{c}[\vec{B}[\vec{\omega}\vec{r}_\perp]] =$$
$$= \frac{1}{c}\{\vec{\omega}\cancel{(\vec{B}\vec{r}_\perp)} - \vec{r}_\perp(\vec{B}\vec{\omega})\} = -\frac{B\omega}{c}\vec{r}_\perp$$

$\vec{r}_\perp$ - это горизонтальная составляющая (**r**), которую обозначают как ρ. То есть в цилиндрической СК напряжённость имеет вид ($-\frac{B\omega\rho}{c}$; 0; 0).

Какие мы мощные – нашли **E(r)**! Что там требуется от нас? Разность потенциалов? Так зная **E(r)**, f(**r**) ищется на изи:

E=-grad f (буква φ уже занята под угол, так что потенциал будет f).

Разумно вспомнить формулу для градиента в цилиндрической СК:

$$-\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$$ и это =($-\frac{B\omega\rho}{c}$; 0; 0).

Отсюда потенциал f не зависит от φ, z, а производная по ρ есть $\frac{B\omega\rho}{c}$. Отсюда потенциал f имеет вид f(ρ,φ,z)=$\frac{B\omega\rho^2}{c}$. Берём разность в точках ρ=0 и ρ=R, получаем U=$\frac{B\omega R^2}{c}$

Теперь найдём распределение зарядов в цилиндре. У нас будет и объёмная, и поверхностная плотность зарядов. Объёмную найдём как $\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} div\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. Нам потребуется дивергенция в цилиндрической СК, это

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

поэтому $\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial(\rho \mathrm{E}(\rho))}{\partial\rho} = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\mathrm{B}\omega\rho^2}{c} = \frac{\mathrm{B}\omega}{2\pi c}$ – константа, кстати, не зависит от ρ. Во всех точках цилиндра объёмная плотность одинакова! А суммарный объёмный заряд $q_{объёмный} = \rho * \pi R^2 h = \frac{\mathrm{B}\omega R^2 h}{2c}$.

По закону сохранения заряда, раз возник такой объёмный положительный заряд, отрицательному надо куда-то деваться. В Российской империи любили ссылать на окраину империи – в Архангельск и прочую Вятку, Кавказ, Среднюю Азию… А проводники ссылают «ненужный» заряд на поверхность ☺

$q_{поверхн} = -\, q_{объёмный} = -\frac{\mathrm{B}\omega R^2 h}{2c}$.

А чтобы найти поверхностную плотность, поделим на площадь боковой поверхности $2\pi Rh$:

$\sigma = -\frac{\mathrm{B}\omega R}{4\pi c}$.

Задача решена.

Замечание: Чугреев и Шишанин ищут поверхностную плотность немного иначе, через условие скачка D_n, делённого на 4π. Так тоже можно, но ЗСЭ они неявно, но всё равно используют (когда говорят, что D_n вне цилиндра $=0$).

Резюме:

Задачи, где среда двигается поступательно (29.1), следует решать преобразованиями Лоренца.

Задачи, где среда вращается (29.2, 29.3), можно решать и без преобразований Лоренца. Основная формула - $\vec{E} = -\frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]$. Т.к. **v** и **B** нам даны, по этой формуле находится **E**, а затем можно и токи найти: **j**=σ**E**.